

Dokument należy cytować w następujący sposób:

*M.Bilska, D.Ceremański, B.Kowalski, L.Olejek: „Wyznaczanie krzywej umocnienia na podstawie danych z próby jednoosiowego rozciągania. Raport grupy UFGbySPD. Instytut Technik Wytwarzania. Warszawa 2016-2020*

# Wyznaczanie krzywej umocnienia na podstawie krzywej rozciągania

## Spis treści

Wstęp.....	2
Krzywa rozciągania.....	3
Krzywa umocnienia odkształceniowego .....	3
Przeliczenia .....	4
Równanie krzywej umocnienia .....	4
Równanie dwuparametrowe .....	4
Równanie trójparametrowe .....	5
Przykład.....	5
Obróbka danych doświadczalnych .....	5
Zapis inżynierski $\bar{\sigma}(\varepsilon_\ell)$ .....	5
Bezwymiarowy zapis wydłużenia .....	7
Zapis tradycyjny $P(\Delta L)$ .....	9
Sporządzanie wykresów .....	9
Wyznaczanie stałych równania .....	12
Równanie dwuparametrowe .....	12
Równanie trójparametrowe .....	13
Porównanie wyników aproksymacji.....	14
Częste błędy .....	15
Zalecenia .....	15
LITERATURA .....	16

## Wstęp

Próbie jednoosiowego rozciągania przeprowadza się w celu wyznaczenia podstawowych własności mechanicznych rozmaitych materiałów. W przypadku próbek wykonanych z metali zdolnych do dużych odkształceń oznacza się następujące podstawowe własności plastyczne<sup>1</sup>:

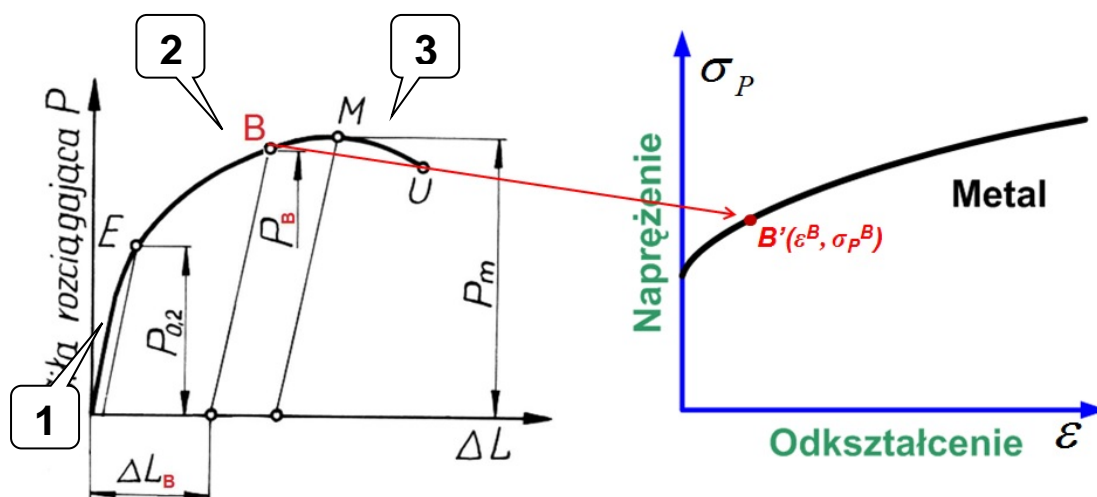
- granica plastyczności – fizyczna  $Re$  lub umowna  $R_{p0.2}$  [MPa],
- wytrzymałość na rozciąganie  $Rm$  [MPa],
- naprężenie rozrywające umowne  $Ro$  [MPa] (odniesione do przekroju pierwotnego)
- wydłużenie równomierne  $Ar$  [%], będące trwałym (tj. określonym z pominięciem wydłużenia sprężystego) wydłużeniem względnym przy największej sile
- wydłużenie całkowite  $A$  [%] po zerwaniu, określone z pominięciem wydłużenia sprężystego zapisywane jako  $A5$  lub  $A10$  [%] w zależności od krotności próbek użytych do rozciągania,
- przewężenie  $Z$  [%] procentowe przekroju zerwanej próbki.

Na podstawie danych z próby rozciągania można także wyznaczyć niewielki odcinek przebiegu krzywej umocnienia  $\sigma_P = f(\epsilon)$ . Zagadnienia podstawowe dotyczące przeprowadzenia próby rozciągania przedstawiono w skrypcie [1]. Opisano tam fazy procesu rozciągania próbki, które na Rys. 1 zilustrowano na krzywej rozciągania (reprezentuje ją wykres pokazany po lewej stronie). Przy rozciąganiu próbki z materiału ciągliwego wyróżnia się: odkształcanie sprężyste (faza 1), stateczne odkształcanie plastyczne (faza 2), niestateczne odkształcanie plastyczne (faza 3) i rozdzielanie materiału. We wskazanym skrypcie podano także definicje podstawowych zależności dla krzywej umocnienia, a mianowicie odkształcenia zastępczego  $\epsilon$  i naprężenia uplastyczniającego  $\sigma_P$ , które można dla dowolnego stanu naprężenia wyznaczyć warunkowo plastyczności Hubera.

Ponieważ dla jednoosiowego rozciągania  $\epsilon_2 = \epsilon_3 = -0,5 \epsilon_1$ , a  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ , więc odkształcenie zastępcze  $\epsilon$  i naprężenie uplastyczniające  $\sigma_P$  dla takiego stanu naprężenia odpowiednio wynoszą

$$\epsilon = \epsilon_1, \quad \sigma_P = \sigma_1.$$

Oznacza to, że krzywa  $\sigma_P(\epsilon)$  jest jednocześnie uogólnioną krzywą umocnienia materiału. Wystarczy zatem podczas rozciągania odnotowywać przyrosty  $\Delta L$  początkowej długości pomiarowej próbki  $L_0$  i odpowiadających tym przyrostom wartości siły rozciągającej  $P$ . Proces obliczeniowy wyznaczania krzywej umocnienia z próby rozciągania sprowadza się do przeliczenia punktów z wykresu  $P(\Delta L)$  na płaszczyznę  $\sigma_P(\epsilon)$ , co ilustruje Rys. 1. Ta procedura przeliczania nie może jednak być zastosowana dla wszystkich punktów krzywej rozciągania.



Rys. 1. Przeniesienie punktów doświadczalnych zależności  $P(\Delta L)$  na  $\sigma_P(\epsilon)$  [2]; numerami oznaczono istotne fazy rozciągania (opis w tekście)

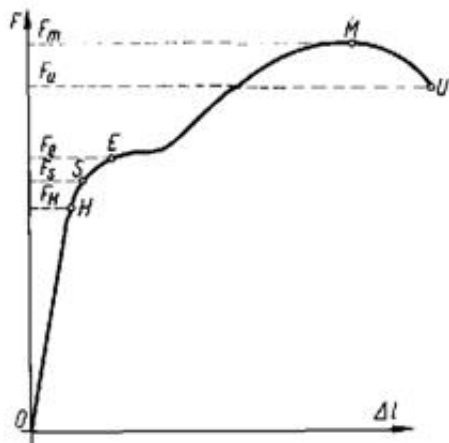
Poniżej opisano algorytm wyznaczania doświadczalnej krzywej umocnienia na podstawie danych z próby jednoosiowego rozciągania. Rozważono dwa przypadki zapisu danych doświadczalnych, mianowicie w

<sup>1</sup> UWAGA: wg obowiązującej obecnie normy PN-EN ISO 6892-1:2009 "Metale - Próba rozciągania - Część 1: Metoda badania w temperaturze otoczenia" niektóre oznaczenia wielkości fizycznych, których wartości wyznacza się z próby rozciągania, różnią się od wymienionych, stosowanych w większości podręczników, np.  $Ar=Ag$ ,

postaci zależności  $P(\Delta L)$  oraz  $\sigma(\varepsilon_\ell)$ . Opisano również sposób wyznaczenia parametrów równania krzywej umocnienia o postaci dwu i trójparametrowej.

## Krzywa rozciągania

Dane doświadczalne wyznaczone z próby jednoosiowego rozciągania można przedstawić w postaci wykresu, tzw. **krzywej rozciągania**. Jest to graficzne przedstawienie zależności funkcyjnej  $P(\Delta L)$ , tj. siły rozciągającej  $P$  od przyrostu  $\Delta L$  początkowej długości pomiarowej próbki  $L_0$ . Przykładową krzywą rozciągania o takiej postaci obrazuje Rys. 2.



Rys. 2. Wykres krzywej rozciągania z wyraźną (fizyczną) granicą plastyczności [3]

Często zdarza się, że wynik próby rozciągania jest zapisywany w formie uogólnionej. Uogólnienie najczęściej wprowadza się dla osi odciętych. Mianowicie zamiast bezwzględnej wartości przyrostu  $\Delta L$  początkowej długości pomiarowej stosuje się miarę względną odnosząc przyrost wydłużenia  $\Delta L$  do początkowej długości pomiarowej próbki  $L_0$ , czyli

$$\varepsilon_\ell = \frac{\Delta L}{L_0} \quad (1a)$$

W ten sposób powstaje zależność siły rozciągającej  $P$  od wydłużenia względnego  $\varepsilon_\ell$ , które jest wielkością niemianowaną. A zatem krzywa rozciągania przedstawiana w postaci wykresu jest teraz funkcją zapisywaną jako  $P(\varepsilon_\ell)$ .

Można również zupełnie uniezależnić krzywą rozciągania od rozmiaru rozciąganej próbki.

Wprowadzenie takiego uogólnienia wymaga przeliczenia wartości dla osi rzędnych. Przeliczenie polega na odniesieniu siły rozciągającej do przekroju poprzecznego próbki. Najłatwiej taki zabieg matematyczny przeprowadzić dzieląc bieżącą wartość siły rozciągającej  $P$  przez wartość stałą, np. przez początkowy przekrój poprzeczny próbki  $A_0$ . Takie przeliczenie umożliwia przedstawienie obciążenia próbki podczas rozciągania przez wielkość wyrażoną w jednostkach naprężenia, tj. w [MPa]. Naprężenie osiowe  $\bar{\sigma}$  obliczone w sposób

$$\bar{\sigma} = P/A_0 \quad (1b)$$

nie jest jednak naprężeniem rzeczywistym, gdyż realny przekrój poprzeczny rozciąganej próbki ulega trwałemu zmniejszeniu w trakcie przyrostu wydłużenia względnego  $\varepsilon_\ell$ . Opisany sposób uogólnionego przedstawienia krzywej rozciągania nazywa się inżynierskim. Często **inżynierska krzywa**  $\bar{\sigma}(\varepsilon_\ell)$  jest wykreślana z uwzględnieniem odkształceń sprężystych i prowadzona aż do punktu utraty spójności, chociaż wiadomo, że w fazie niestatecznego rozciągania nie ma już jednoosiowego stanu naprężenia. Inżynierskie przedstawienie zależności naprężenia  $\bar{\sigma}$  działającego podczas rozciągania od względnego wydłużenia  $\varepsilon_\ell$  jest zbyt daleko idącym odejściem od rzeczywistych warunków obciążenia panującego przy rozciąganiu.

Krzywa inżynierska  $\bar{\sigma}(\varepsilon_\ell)$  nie jest przydatna dla technologa obróbki plastycznej.

## Krzywa umocnienia odkształceniowego

Technologa obróbki plastycznej interesuje krzywa umocnienia, tzn. zależność przedstawiająca zmianę naprężenia uplastyczniającego  $\sigma_P$  od odkształcenia zastępczego  $\varepsilon$ . Jak wspomniano we wstępie przy jednoosiowym rozciąganiu odkształcenie zastępcze i naprężenie uplastyczniające wynoszą  $\varepsilon = \varepsilon_I$ ,  $\sigma_P = \bar{\sigma}_I$ .

<sup>2</sup> UWAGA: często wydłużenie względne podaje się w [%], wtedy  $\varepsilon_\ell = 100 \cdot (\Delta L / L_0)$

Składową osiową odkształcenia, reprezentującą wydłużenie części pomiarowej próbki oraz rzeczywiste naprężenia oblicza się ze wzorów:

$$\varepsilon_1 = \ln \frac{L_0 + \Delta L}{L_0} = \ln \frac{L}{L_0}, \quad (2a)$$

$$\sigma_1 = \frac{P}{A}, \quad (2b)$$

gdzie:

$L$  - długość pomiarowa próbki pod działaniem siły  $P$ ,

$A$  - pole rzeczywistego poprzecznego przekroju próbki pod działaniem siły  $P$ .

Wartość  $A$  wyznacza się z warunku niezmienniej objętości pomiarowej części próbki:

$$A = A_0 \frac{L_0}{L}. \quad (3)$$

Obliczone ze wzorów (2a) i (2b) wartości  $\varepsilon_1 = \varepsilon$  oraz  $\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_P$ , dla kolejnych etapów rozciągania próbki, umożliwiają wykreślenie w układzie osi współrzędnych  $(\varepsilon, \bar{\sigma}_P)$  krzywej umocnienia materiału. Jak już wspomniano, otrzymana krzywa odpowiada stosunkowo małym wartościom odkształceń  $\varepsilon$ , gdyż z próby rozciągania można ją wyznaczyć tylko w zakresie wydłużenia równomiernego<sup>3</sup>.

## Przeliczenia

Algorytm obliczeniowy doświadczalnej krzywej umocnienia na podstawie wyniku próby jednoosiowego rozciągania zawiera następujący ciąg czynności:

- o Wyznaczenie siły uplastyczniającej  $P_e$  względnie inżynierskiego naprężenia w chwili uplastycznienia  $\bar{\sigma}_e$  (w przypadku materiałów nie wykazujących wyraźnej granicy plastyczności należy określić wartość umowną, która zgodnie z umową powinna występować przy wydłużeniu względnym  $\varepsilon_\ell = 0,2\%$ , czyli dla  $\Delta L = 0,002 \cdot L_0$ )
- o Wyznaczenie siły maksymalnej  $P_m$  względnie inżynierskiego naprężenia w chwili wystąpienia siły maksymalnej  $\bar{\sigma}_m$  (dla siły  $P_m$  można wyznaczyć wartość  $R_m$  z definicji, a w przypadku posługiwania się krzywą inżynierską  $\bar{\sigma}(\varepsilon_\ell)$  znaleźć  $R_m = \max(\bar{\sigma})$ )
- o Obliczenie dla każdego punktu doświadczalnego znajdującego się między punktami  $P_e$  a  $P_m$  wartości odkształcenia zastępczego ze wzoru (2a) względnie
 
$$\varepsilon_1 = \ln(1 + \varepsilon_\ell) \quad (4a)$$
 w przypadku posługiwania się krzywą inżynierską  $\bar{\sigma}(\varepsilon_\ell)$
- o Obliczenie dla każdego punktu doświadczalnego, znajdującego się między punktami  $P_e$  a  $P_m$ , wartości naprężenia uplastyczniającego ze wzorów (2b) i (3) względnie
 
$$\bar{\sigma}_P = \bar{\sigma} \cdot (1 + \varepsilon_\ell) \quad (4b)$$
 gdy posługujemy się krzywą inżynierską  $\bar{\sigma}(\varepsilon_\ell)$

## Równanie krzywej umocnienia

Obliczanie parametrów krzywej umocnienia może być poprzedzone szacowaniem ich wartości metodami uproszczonymi. Możliwe są rozmaite sposoby postępowania, które zależą od żądanej postaci matematycznej równania

### *Równanie dwuparametrowe*

W szczególnych przypadkach (np. materiały wyżarzone) krzywa umocnienia może być opisana równaniem

$\bar{\sigma}_P = C \cdot \varepsilon^n$ , w którym występują dwie stałe  $C$  i  $n$ . Metody uproszczone [4] zakładają stosowanie następujących zależności

<sup>3</sup> Krzywą umocnienia z rozciągania można wyznaczyć pobierając punkty doświadczalne z krzywej rozciągania od punktu uplastycznienia (granica plastyczności) do obciążenia siłą maksymalną (wytrzymałość na rozciąganie)

- o Stała krzywej umocnienia:  $C = \frac{R_m}{e^{-n} \cdot n^n}$
- o Wykładnik krzywej umocnienia  $n = \varepsilon_1$  dla siły  $P_m$

Gorsze wyniki daje metoda wykreślna określania wartości wykładnika  $n$ , która wymaga obliczenia

współczynnika  $W = \frac{R_{0.2}}{R_m} = \frac{0.002^n}{e^n \cdot n^n}$ . Na podstawie tego równania należy sporządzić wykres  $W(n)$ , z którego można odczytać wartość wykładnika potęgowego  $n$ .

Pracując w arkuszu kalkulacyjnym EXCEL można skorzystać z funkcji trendu. W palecie jest dostępna funkcja postaci  $y = A \cdot x^B$ .

### Równanie trójparametrowe

Opisywanie właściwości plastycznych materiałów występujących w innych stanach niż stan wyżarzony wymaga zastosowania krzywej umocnienia postaci  $\sigma_P = C (\varepsilon + \varepsilon_0)^n$ . Wartości stałych tego równania  $C$ ,  $\varepsilon_0$  i  $n$  najprościej wyznacza się z warunku, aby krzywa określona podanym równaniem przechodziła przez trzy zadane punkty A, B, C leżące na krzywej doświadczalnej. Ten sposób szacowania parametrów równania trójparametrowego zwany metodą trójpunktową opisano w [5].

Pracując w arkuszu kalkulacyjnym EXCEL należy skorzystać z zaawansowanych funkcji służących do interpolacji punktów doświadczalnych równaniem postaci  $y = A \cdot (x - C)^B$ . Funkcje takiej kategorii są dostępne po doinstalowaniu dodatku zaawansowanych funkcji matematycznych, tzw. SOLVERA, który jest w pakiecie MsOffice, ale nie jest uaktywniany podczas standardowej instalacji tego pakietu MsOffice.

## Przykład

### Obróbka danych doświadczalnych

Poniżej pokazano zastosowanie algorytmu przeliczania danych zarejestrowanych podczas próby jednoosiowego rozciągania w celu uzyskania wartości współrzędnych  $(\varepsilon, \sigma_P)$  dla punktów, które umożliwią wykreślenie doświadczalnej krzywej umocnienia. Rozpatrzono dwa przypadki zapisu danych doświadczalnych uzyskanych w próbie jednoosiowego rozciągania.

#### Zapis inżynierski $\sigma(\varepsilon_\ell)$

Obecnie stosowane maszyny wytrzymałościowe wyposażone są w układy komputerowej rejestracji, które przed zapisem danych dokonują przeliczenia wartości bezpośrednio rejestrowanych przy rozciąganiu, a więc przemieszczenia  $\Delta L$  [mm] i siły  $P$  [kN], na umowne naprężenie  $\bar{\sigma}$  [MPa] wg wzoru (1b) i wydłużenie względne  $\varepsilon_\ell$  [%] wg wzoru (1a). Użytkownik przed rozpoczęciem próby podaje długość bazy pomiarowej  $L_0$  dla wyznaczania wydłużenia względnego  $\varepsilon_\ell$  i wymiary pola początkowego przekroju poprzecznego w celu obliczenia umownego naprężenia  $\bar{\sigma}$ .

Ww. sposób postępowania zilustrowano danymi pochodzącymi z badania próbki materiału pobranego z walcowego pręta o średnicy 35 mm wyciskanego współbieżnie, który wykonano aluminium EN-AW 1350A-H112<sup>4</sup>. Ten materiał ma właściwości plastyczne typowe dla metali o dużej zdolności do odkształceń plastycznych, jakie powinny mieć materiały wsadowe w stanie wyjściowym do procesów kształtowania plastycznego na zimno.

Na Rys. 3<sup>5</sup> podano fragmenty arkusza kalkulacyjnego, w którym przeliczono dane  $\bar{\sigma}(\varepsilon_\ell)$  uzyskane z próby jednoosiowego rozciągania (wydłużenie  $\varepsilon_\ell$  wyrażone w [%]) w celu wyznaczenia doświadczalnej krzywej umocnienia.

<sup>4</sup> Wyniki próby rozciągania zapisano w arkuszu [TTest 1350 proba rozciągania \_\_.xlsx]

<sup>5</sup> Są to dane pobrane z tablicy wyników rozciągania próbki ozn. „1xi” pobranej z materiału w stanie wyjściowym (zakładka „stan wyjściowy” arkusza [TTest 1350 proba rozciągania \_\_.xlsx])



próbka 1xi		próbka 1xi		51,1080435		
a	1,6			51,4869561		
b	1,2			Sp		
EI	S	Ec	Sp	[MPa]	Ep	Sp (spr)
Strain (%)	Stress (MPa)	[-]	[MPa]			
0,01611	3,93332	0,00016109	3,933953658	52,6634255	0	
0,01876	4,01249	0,00018758	4,013242743	53,0718993	0,00021	32,5591
0,01689	4,53097	0,00016889	4,531735281	53,3248097	0,0004	36,7787
0,01688	5,43396	0,00016879	5,434877252	53,6597912	0,00058	39,5908
0,01987	6,66474	0,00019868	6,666064284	53,9282614	0,00077	41,8211
0,02142	8,31109	0,00021418	8,312870235	54,0856564	0,00096	43,6847
0,02238	10,0576	0,00022377	10,05985089	54,3420965	0,00122	45,7169
0,02597	11,77349	0,00025967	11,77654758	54,7234231	0,00134	46,582
0,02826	13,32307	0,00028256	13,3268351	54,8030945	0,00152	47,7659
0,03421	15,31615	0,00034204	15,32138965	55,0775845	0,00172	48,8993
0,04124	16,98974	0,00041231	16,99674657	55,2634378	0,00192	49,9578
0,04713	19,37948	0,00047119	19,38861355	55,4410276	0,0021	50,8456
0,05252	21,62214	0,00052506	21,63349595	55,5239908	0,00231	51,8073
0,05697	23,39609	0,00056954	23,40941875	55,6100285	0,0025	52,6158
0,06276	25,90953	0,0006274	25,92579082	55,9978609	0,00269	53,3732
0,06808	27,74125	0,00068057	27,76013624	56,0632667	0,00289	54,139
0,07461	30,03427	0,00074582	30,05667857	56,2463983	0,00309	54,8483
0,08186	31,83609	0,00081827	31,86215102			
0,08595	33,62703	0,00085913	33,65593243			
0,09618	35,79005	0,00096134	35,82447287			

a)

b)

c)

Rys. 3. Fragmety arkusza kalkulacyjnego do wyznaczania krzywej umocnienia z próby rozciągania

Tablica liczb z Rys. 3a zawiera dane zapisane przez układ pomiarowy maszyny wytrzymałościowej. W pierwszej kolumnie zapisano wartości  $\varepsilon_l$  [%] (oznaczone „EI”, nagłówek „Strain [%],”), a w drugiej wartości umownego naprężenia  $\sigma$  [MPa] (oznaczone „S”, nagłówek „Stress [MPa],”). W nagłówku tablicy podano oznaczenie identyfikujące rozciąganą próbkę „1xi” i wymiary jej początkowego przekroju poprzecznego („a” i „b” – próbka miała przekrój prostokątny).

Rys. 3b zawiera wyniki przeliczenia wartości z tablicy danych z rozciągania. Obliczono wartość odkształcenia całkowitego wyrażonego w mierze logarytmicznej (kolumna z nagłówkiem „Ec [-]”), posługując się zależnością (4a). Musimy pamiętać że wartość EI jest podana w % więc musimy podzielić ją przez 100, aby wyrazić dane w sposób umożliwiający dalsze obliczenia. Ilustruje to poniższy przykład, w którym stosując formułę:

$\varepsilon_1 = \ln(1 + EI/100)$  dla wartości pobranej z pierwszego wiersza danych, tj. EI= 0,01611 uzyskamy dla  $\varepsilon_1$  (co reprezentuje odkształcenie całkowite oznaczone na Rys. 3b symbolem  $\varepsilon_c$ ) wartość

$$\varepsilon_1 = \ln\left(1 + \frac{0,01611}{100}\right) = 0,00016109$$

W drugiej kolumnie tablicy z Rys. 3b wstawiono wynik przeliczenia naprężenia wg wzoru (4b), który jednak musi być zmodyfikowany. Musimy mianowicie oddalić problem związany z przeliczaniem wartości wydłużenia  $\varepsilon_l$ , które przecież jest wyrażone w procentach. Kłopotu możemy pozbyć się w ten sam sposób co wyżej. zilustrowano to poniższym przykładem, w którym zastosowano wzór (4b) jednakże po zmodyfikowaniu do postaci:

$\sigma_p = \sigma \cdot (1 + \varepsilon_l/100)$ . Dla wartości pobranej z pierwszego wiersza danych, tj. S=3,93332 uzyskamy

$$\sigma_p = 3,93332 \cdot \left(1 + \frac{0,01611}{100}\right) = 3,933953658 \text{ [MPa]}$$

Chociaż obliczoną wartość oznaczono jako naprężenie uplastyczniające  $\sigma_p$  (w tablicy z Rys. 3b zastosowano oznaczenie Sp) to jednak dla danych znajdujących się w początkowych wierszach jest to wartość umowna naprężenia (tzn. naprężenie inżynierskie). Dopiero po osiągnięciu granicy plastyczności wartości naprężenia Sp – obliczone w zaproponowany sposób – będą mogły posłużyć do wykreślenia wykresu krzywej umocnienia. Wynik właściwego postępowania zaprezentowano na Rys. 3c.

Tablica z Rys. 3c w pierwszej kolumnie zawiera wyniki przeliczenia naprężenia wg prawidłowo zastosowanego, tj. o nieco zmodyfikowanej postaci przez dodanie w mianowniku liczby 100, wzoru (4b), ale już tylko dla zakresu odkształceń plastycznych (tzn. uwzględniono tylko te wartości naprężeń, które mają wartości większe od granicy plastyczności). Uznano bowiem, że dla materiału analizowanej próbki granica

plastyczności  $R_{02}$  wynosi  $R_{02} = 52,6634255$  MPa. *UWAGA: sposób poszukiwania wartości umownej granicy plastyczności  $R_{02}$  opisano nieco dalej, m.in. wykorzystując Rys. 7.* Dlatego z prawej strony wartości  $R_{02} = 52,6634255$  (czyli w kolumnie ozn. „E<sub>P</sub>”) pojawiła się cyfra 0. Oznacza to, że dopiero począwszy od umownego naprężenia inżynierskiego o wartości 52,6634255 [MPa] (jak widać jest to pierwsza wartość w kolumnie ozn. „S<sub>P</sub>”) odkształcenie plastyczne ozn. „E<sub>P</sub>” będzie sukcesywnie naliczane na podstawie aktualnej wartości odkształcenia całkowitego ozn. „E<sub>C</sub>”.

W drugiej kolumnie tablica z Rys. 3c zatem wstawiono wartości odkształceń plastycznych, począwszy od umownej granicy plastyczności wyznaczonej dla odkształceń równych 0,2%. Są to więc wyłącznie wartości odkształceń plastycznych, z pominięciem odkształceń sprężystych. Wartość „E<sub>P</sub>” obliczono odejmując od bieżącej wartości „E<sub>C</sub>” bieżącą stałą wartość „E<sub>C</sub>”<sup>0</sup> początkową, czyli tą odczytaną z wiersza danych dla S<sub>P</sub> = R<sub>02</sub> = 52,6634255 MPa. W arkuszu kalkulacyjnym wyróżniono ten obszar tablicy danych przez zaciemnienie. Dlatego tło tablicy z Rys. 3c jest ciemniejsze od białego tła tablic z Rys. 3a i Rys. 3b.

Wyróżniona ciemniejszym tłem tablica Rys. 3c ma trzy kolumny. Powstaje zatem pytanie co zapisano w trzeciej kolumnie tej tablicy. Ponieważ prowadząc obliczenia łatwo można popełnić błąd, zaproponowano pewien sposób sprawdzenia. Wynik takich obliczeń sprawdzających dla wartości S<sub>P</sub> podano właśnie w trzeciej kolumnie tej zaciemnionej tablicy, co wyjaśnia nazwę nagłówka tej kolumny ozn. „S<sub>P</sub> (spr)”. Wartości S<sub>P</sub> (spr) obliczono z następującego wzoru:

$$S_P(\text{spr}) = C \cdot \varepsilon_P^n,$$

w którym stałe C i n oszacowano na podstawie wcześniej wyznaczonych wartości  $R_{02}$  i  $R_m$  oraz ich relacji w postaci współczynnika  $W = R_{02} / R_m$ . Ponieważ zastosowano metodę uproszczoną (tzw. metoda wykresna, którą skrótowo opisana na str.4 w podrozdziale „Równanie dwuparametrowe”), która daje dobre wyniki tylko w przypadku materiałów wyżarzonych, należy uznać to sprawdzenie za przydatne tylko do wyeliminowania błędu grubego. Zwróćmy uwagę, że różnica między „S<sub>P</sub>”, a „S<sub>P</sub>(spr)” sięga nawet kilkudziesięciu procent umownej granicy plastyczności, która w omawianym przypadku wynosi  $R_{0,2} = 52,6634255$  MPa. Porównaj wynik obliczenia: dla punktu w pobliżu  $R_{02}$  (53,07-32,56)/52,66≈40%), dla wydłużenia powiększonego o kolejne 0,2% (55,44-50,85)/52,66≈10%) i punktu w pobliżu  $R_m$  (101,24-126,89)/52,66≈-50%). Zatem istotnie, przyrównując wartości owych naprężeń można wykryć jedynie wystąpienie błędu grubego.

### Bezwymiarowy zapis wydłużenia

Niekiedy układ zapisu danych z rozciągania przedstawia wydłużenie rozciąganej próbki w postaci wydłużenia względnego wyrażonego w jednostkach niemianowanych [mm/mm]. Wydłużenie próbki jest podawane w mierze względnej, ale bez przeliczenia procentowego. Dlatego odkształcenie zastępcze można obliczać bezpośrednio z wzoru (4a). Przypadek ten zilustrowano danymi pochodzącymi z badania w temperaturze otoczenia (oznaczenie danych @RT) próbki materiału ultradrobnoziarnistego, który uzyskano prowadząc przeciskanie przez kanał kątowy wsadów o rozmiarze #8. Próbki do jednoosiowego rozciągania wykonano z aluminium EN-AW 6060UFG<sup>6</sup>. Ten materiał ma właściwości plastyczne typowe dla metali o strukturze ultradrobnoziarnistej (UFG), tj. zachowuje zdolność do odkształcenia plastycznego na zimno, ale przy rozciąganiu szybko pojawia się lokalizacja odkształcenia. Nietypowe zachowanie się metalu UFG przy jednoosiowym rozciąganiu analizowano w pracy [6]. Zwrócono tam uwagę na cechy, które zmniejszają znacznie zakres odkształcenia, dla którego można z próby rozciągania wyznaczyć doświadczalną krzywą umocnienia. Przypadek ten, jako ciekawy, użyto do zilustrowania wyznaczenia krzywej na podstawie danych, w których zastosowano bezwymiarowy zapis wydłużenia względnego w jednostkach [mm/mm].

Na Rys. 4 podano fragmenty arkusza kalkulacyjnego, w którym przeliczono dane<sup>7</sup>  $\sigma(\varepsilon_{\ell/100})$  uzyskane z próby jednoosiowego rozciągania w celu wyznaczenia doświadczalnej krzywej umocnienia. Tym razem względne wydłużenie rozciąganej próbki, umownie oznaczone  $\varepsilon_{\ell/100}$ , wyrażone jest w jednostkach niemianowanych [mm/mm].

<sup>6</sup> Wyniki próby rozciągania zapisano w arkuszu [TTest 6060 proba rozciągania ECAP 07.xls]

<sup>7</sup> Są to dane pobrane z tablicy wyników rozciągania próbki ozn. 1FrT pobranej z materiału 6060 w stanie UFG (zakładka „1FrT” arkusza [TTest 6060 proba rozciągania ECAP 07.xls])

próbką	1FrT	dośw. krz. umocnienia próbką 1FrT		Ec	Sp	Rp
El/100	S	Ec	Sp	[-]	[MPa]	
Strain mm/mm	Stress [MPa]	[-]	[MPa]	0,00305	188,4166	0
0,000405084	-0,079113924	0,000405	-0,079146	0,003149	192,5727	9,87E-05
0,000406004	-0,068565401	0,000406	-0,068593	0,003268	195,6225	0,000218
0,000470336	-0,094936709	0,000407	-0,094981	0,003283	200,9488	0,000233
0,000411557	-0,068565401	0,000411	-0,068594	0,003377	203,0844	0,000327
0,000417822	-0,058016878	0,000418	-0,058041	0,003419	207,3321	0,000369
0,000514104	-0,058016878	0,000514	-0,058047	0,003443	212,1003	0,000393
0,000414321	-0,063291139	0,000414	-0,063317	0,003559	214,999	0,000509
0,000446402	-0,068565401	0,000446	-0,068596	0,003638	220,2196	0,000588
0,000440722	-0,084388186	0,000441	-0,084425	0,003737	222,7454	0,000687
0,00046138	-0,084388186	0,000461	-0,084427	0,003847	227,1591	0,000797
0,000454934	-0,073839662	0,000455	-0,073873	0,003932	231,1285	0,000882
0,000448025	-0,052742616	0,000448	-0,052766	0,003943	232,6613	0,000893
0,000423018	-0,068565401	0,000423	-0,068594	0,004014	236,2788	0,000964
0,000414231	-0,068565401	0,000414	-0,068594	0,004118	239,195	0,001068
0,000435177	-0,084388186	0,000435	-0,084425	0,004098	241,9334	0,001048
0,000440067	-0,068565401	0,00044	-0,068596	0,004226	245,3277	0,001176
0,000415398	-0,068565401	0,000415	-0,068594	0,004272	248,2206	0,001222
0,000404764	-0,058016878	0,000405	-0,05804	0,004339	251,2194	0,001288
0,000431842	-0,073839662	0,000432	-0,073872	0,004404	253,7787	0,001354
0,000333528	-0,058016878	0,000333	-0,058036	0,004427	255,6863	0,001377
0,000471729	-0,073839662	0,000472	-0,073874	0,004527	257,5875	0,001477
0,000447315	-0,052742616	0,000447	-0,052766	0,004586	259,4096	0,001536
0,000441471	-0,063291139	0,000441	-0,063319	0,004692	260,4172	0,001642
				0,004707	262,064	0,001657
				0,004719	262,6925	0,001669

a)

b)

c)

Rys. 4. Fragmenty arkusza kalkulacyjnego do wyznaczania krzywej umocnienia z próby rozciągania z odmiennym zapisem wartości odkształcenia

Tablica z Rys. 4a zawiera dane zapisane przez układ pomiarowy maszyny wytrzymałościowej, które – jak wspomniano – mają nieco zmienioną formę zapisu wartości zadanego odkształcenia. W pierwszej kolumnie (ozn. El/100) zapisano wartości wydłużenia względnego  $\varepsilon_l$  w jednostkach [mm/mm], a w drugiej (ozn. S) wartości umownego naprężenia  $\bar{\sigma}$  [MPa].

Tablica z Rys. 4b zawiera wyniki przeliczenia wartości z tablicy danych z rozciągania. Tym razem można było zastosować zależność (4a) bez modyfikacji. Obliczono zatem wartość odkształcenia całkowitego  $\varepsilon_c$  wyrażonego w mierze logarytmicznej. W poniższym przykładzie, wyjaśniającym tok prowadzonych obliczeń, zastosowano oznaczenia używane w arkuszu kalkulacyjnym i otrzymano. Z zależności  $Ec = \ln(1 + 'El/100')$  dla wartości pobranej z pierwszego wiersza danych, tj. 'El/100' = 0,000405084, uzyskano wynik

$$Ec = \ln(1 + 0,000405084) \approx 0,000405$$

W drugiej kolumnie tablicy z Rys. 4b wstawiono wynik przeliczenia naprężenia wg oryginalnej formuły zapisanej we wzorze (4b). Stosując notację przyjętą w arkuszu kalkulacyjnym uzyskano z wzoru

$$Sp = S * (1 + 'El/100')$$

$$Sp = -0,079113924 * (1 + 0,000405084) \approx -0,079146 [MPa]$$

Należy zaznaczyć, że przy jednoosiowym rozciąganiu naprężenie  $Sp$  nie może przyjmować wartości ujemnych. Dane występujące w pierwszych wierszach zazwyczaj obarczone są niedokładnościami wynikającymi z kasowania luzów występujących w uchwytach trzymających części chwytowe rozciąganych próbek. Nie bacząc jednak na niestosowne wartości liczbowe, wykorzystano je do zilustrowania toku przeliczenia.

Tablica z Rys. 4c w pierwszej kolumnie zawiera wyniki wcześniej wykonanego przeliczenia odkształcenia całkowitego  $\varepsilon_c$  wyrażonego w mierze logarytmicznej. Tym razem (warto w tym miejscu zwrócić uwagę, że omawiając sposób obliczania wartości pojawiających się w tablicy z Rys. 3, było inaczej!) są to te same dane, które były prezentowane w kolumnie ozn. „Ec” tablicy z Rys. 4b. Wartości jednak są różne gdyż tablica na Rys. 4c zawiera w pierwszej kolumnie „Ec” dane tylko dla takich odkształceń całkowitych  $\varepsilon_c$ , dla których odnotowano naprężenia o wartości większej od granicy plastyczności. Uznano w tym przypadku, że dla materiału analizowanej próbki ze stopu 6060UFG umowna granica plastyczności  $R_{02}$  wynosi  $R_{02} = 188,4166$  MPa. Zatem w drugiej kolumnie tablicy z Rys. 4c występują już tylko wartości naprężeń uplastyczniających,



które mogą być użyte do wyznaczenia krzywej umocnienia. Nie ma jednak jeszcze obliczonych wartości odkształceń plastycznych. Te znajdują się w trzeciej kolumnie. *Warto tutaj zwrócić uwagę, na kolejną różnicę w stosunku do danych prezentowanych na Rys. 3. W przypadku omawianych na Rys. 4 obliczeń krzywej umocnienia dla stopu 6060UFG, nie wykonywano obliczeń sprawdzających. Powodem takiej decyzji były szczególne właściwości sprężysto-plastyczne materiałów UFG. Cechy te powodują, że sposób sprawdzania, który sprawdza się dość dobrze dla materiałów wyżarzonych w tym przypadku nie może być stosowany.*

Jak wspomniano, w trzeciej kolumnie tablicy danych z Rys. 4c przedstawiono wartości odkształcenia plastycznego dla danych doświadczalnych próbki „1FrT”. Obliczono je w analogiczny sposób, jak dla materiału wyżarzonego (wcześniejszy przypadek z Rys. 3). Dane, zapisane w omawianej tablicy, ukazują zatem wartości naprężenia uplastyczniającego  $\sigma_P$  oraz zastępczego odkształcenia trwałego  $\varepsilon$  – wyrażonego w mierze logarytmicznej odkształcenia plastycznego, począwszy od wartości umownej granicy plastyczności  $R_{02}$ . Mogą zatem być użyte do wyznaczenia krzywej umocnienia. Jednak w przypadku szczególnych właściwości sprężysto-plastycznych materiału UFG zdecydowano, że do wykreślenia doświadczalnego wykresu krzywej umocnienia posłużą tylko te dane, których zakres będzie wybrany na podstawie innych kryteriów. W przypadku bowiem braku wyraźnej granicy plastyczności powszechnie stosuje się umowę definiującą wyznaczenie wartości  $R_{02}$ , która niekoniecznie musi być słuszna dla nowych klas materiałów. W analizowanym przypadku zdecydowano, że wykres doświadczalnej krzywej umocnienia  $\sigma_P = f(\varepsilon)$  oraz będzie prezentowany począwszy od punktu określonego współrzędnymi:  $\sigma_P = 251,2194$  MPa i  $\varepsilon = 0,001288$ , oczywiście do momentu wystąpienia naprężenia o wartości maksymalnej (pojawienie się lokalizacji odkształcenia rozpoczynającego fazę niestateczną przy jednoosiowym rozciąganiu). Zakres danych wybrany do wyznaczenia krzywej umocnienia zaznaczono w arkuszu kalkulacyjnym przez podświetlenie komórek ciemniejszym kolorem. W dolnej części tablicy danych z Rys. 4c widać – przez pokazanie na ciemniejszym tle – początkowy zakres danych, które wytypowano do prezentacji doświadczalnej krzywej umocnienia.

### Zapis tradycyjny $P(\Delta L)$

Zrezygnowano z opisywania przeliczeń dla tego przypadku gdyż w ramach badań właściwości metali, które prowadzą obecnie pracownicy i dyplomanci w grupie **UFGbySPD**, obecnie wyniki z rozciągania nie są zapisywane w tej tradycyjnej postaci

## Sporządzanie wykresów

### Prezentacja ogólna wyniku rozciągania

Korzystając z wyliczonych wartości naprężenia uplastyczniającego  $\sigma_P$  oraz odkształcenia całkowitego logarytmicznego  $\varepsilon_C$ , można przystąpić do sporządzenia wykresu doświadczalnej krzywej umocnienia  $\sigma_P(\varepsilon)$ . Dysponując bogatym materiałem doświadczalnym, warto jednak najpierw zdać sobie sprawę jak zachowuje się badany materiał w pełnym zakresie obciążenia siłą rozciągającą, a więc w zakresie odkształceń sprężystych (faza 1 próby rozciągania), w fazie (2) wydłużania równomiernego, fazie (3) niestatecznego płynięcia i przy rozdzielaniu stanowiącym kres rozciągania. Dlatego tak często prezentuje się wynik próby rozciągania w notacji inżynierskiej, czyli stosując wzory (1a) dla osi odciętych oraz (1b) dla osi rzędnych.

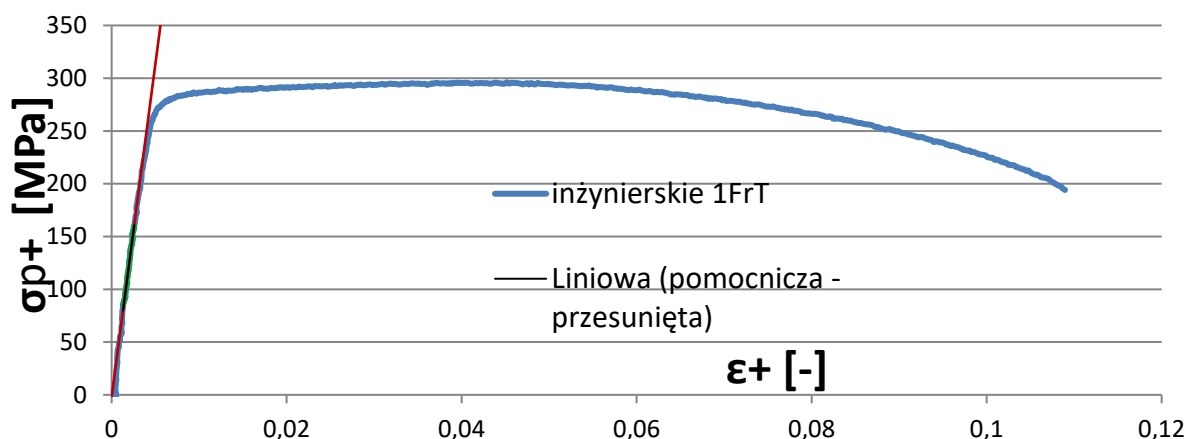
Na Rys. 5 pokazano wykres, który ma służyć właśnie takiej ogólnej prezentacji właściwości sprężysto-plastycznych stopu 6060 UFG, które wyznaczono na przykładzie próbki „1FrT”. Najważniejszą linią tego wykresu jest krzywa opisana w legendzie „inżynierskie 1FrT”. Na osi poziomej odkładano wartości zastępczego odkształcenia logarytmicznego, które obliczano z zależności (2a). Ponieważ jest to odkształcenie całkowite  $\varepsilon_C$  (tj. suma odkształcenia sprężystego  $\varepsilon_{spr}$  i plastycznego  $\varepsilon$  – dane pobrano z kolumny  $E_C$  tablicy z Rys. 4b), to w opisie osi odciętych zastosowano umowny symbol  $\varepsilon_+$ . Oś pionowa służy do prezentowania wartości zastępczego naprężenia, które obliczano z zależności (2b), ale również w zakresie odkształceń sprężystych – dane pobrano z kolumny  $S_P$  tablicy z Rys. 4b. Dlatego w opisie osi rzędnych także zastosowano umowny zapis  $\sigma_{P+}$ .

Z wykresu można wnioskować, że przy poziomie naprężeń ok. 250MPa materiał 6060 UFG przechodzi w stan plastyczny, już przy  $\varepsilon \approx 0,04$  rozpoczyna się długa faza niestatecznego płynięcia, która kończy się plastycznym rozdzielaniem przy  $\varepsilon \approx 0,11$  pod działaniem naprężenia ok. 200MPa. Materiał UFG ma zatem duży zapas plastyczności. Niestety zakres odkształceń, w którym można wyznaczyć krzywą umocnienia z próby jednoosiowego rozciągania jest mizerny – zaledwie 10% odkształcenia, które jest dostępne dla większości plastycznych metali o budowie konwencjonalnej.

### Wyznaczanie umownej granicy plastyczności

Na wykresie z Rys. 5 oprócz krzywej doświadczalnej narysowano także prostą wyprowadzoną z początku układu współrzędnych. Zrobiono to w celu wyznaczenia punktu oddzielającego zakres odkształceń sprężystych od zakresu, w którym występuje płynięcie plastyczne. Zrazu postępowano w następujący uproszczony, bo wizualny sposób. Mianowicie najpierw oceniono wizualnie odchylenie początkowego odcinka krzywej doświadczalnej od prostej. Dokładniejszy sposób wyznaczenia wartości naprężenia rozciągającego, którą można uznać za uplastyczniającą, zilustrowano na kolejnych rysunkach. Szczególnie pomocny w tym zakresie jest Rys. 7.

Następnie, aby wskazać konkretny punkt doświadczalny obliczano odkształcenie dla umownego wydłużenia względnego o wartość  $\varepsilon_t = 0,2\%$  i dobierano najbardziej zbliżoną wartość z tablicy danych arkusza EXCEL. Wyniki poszukiwań współrzędnych punktów doświadczalnych dla analizowanego przypadku zamieszczono na Rys.6.



Rys. 5. Wykres doświadczalnej zależności umownego naprężenia osiowego  $\bar{\sigma}$  od odkształcenia całkowitego  $\varepsilon_C$  wyznaczony na podstawie krzywej rozciągania materiału UFG – dane z rozciągania próbki ozn. „1FrT” (jest to tzw. krzywa inżynierska)

x	y
0	-2,2185
0,02	1260,68

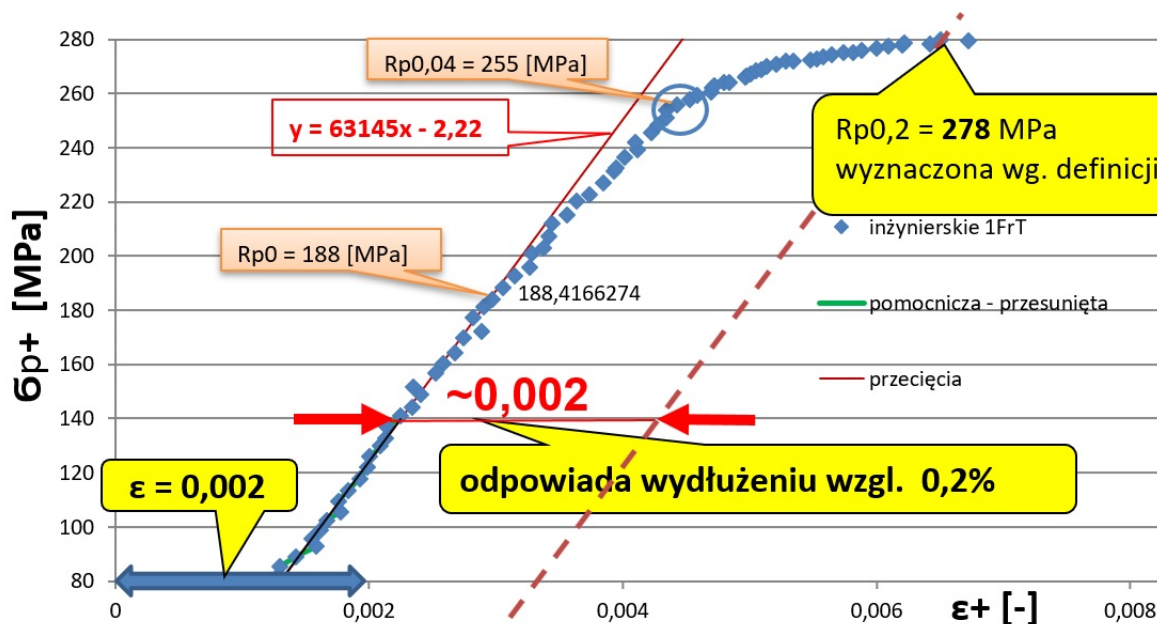
Rys. 6. Fragmenty arkusza kalkulacyjnego do wyznaczenia linii prostej odkształcenia sprężystego celem zilustrowania metody wykresłej określania początku uplastycznienia

Dla wyznaczenia granicy plastyczności zaleca się sporządzenie wykresu ukazującego w stosownie dobranym powiększeniu położenie przecięcia doświadczalnej krzywej – reprezentującej zależność naprężenia osiowego  $\bar{\sigma}$  od odkształcenia całkowitego wyrażonego w mierze logarytmicznej  $\varepsilon_C$  – oraz różnymi pomocniczymi liniami prostymi, zwłaszcza liniami trendu (trend typu liniowego). Wspomniane pomocnicze linie proste wyznacza się na podstawie punktów doświadczalnych z arbitralnie wybranych zakresów fazy odkształcenia sprężystego. Omawianą konstrukcję zilustrowano na Rys. 7. Początek odchylenia wyznaczonej z doświadczenia krzywej inżynierskiej (linia punktowa oznaczona na Rys. 7 ciągiem symboli  $\blacklozenge$  inżynierskie 1FrT) od linii prostych można interpretować jako początki uplastycznienia. Jak widać wybór punktu odpowiadającego uplastycznieniu nie jest jednoznaczny. Na podstawie oceny wizualnej wskazano jako interesujący punkt ozn.  $R_{p0}$ , w którym punkty zdają się zaczynać „odchodzić” od linii prostej (czerwona linia trendu nazwana linią „przecięcia”; na podstawie mniejszej liczby punktów doświadczalnych z fazy odkształcenia sprężystego wyznaczono również zieloną linię trendu nazwaną „pomocnicza-przesunięta, której jednak nie wykorzystano). Zauważono natomiast, że przy wydłużeniu względnym o wartość  $\varepsilon_t = 0,04\%$  odchylenie punktów doświadczalnych od prostej staje się znacząco wyraźniejsze – dla tego punktu doświadczalnego odczytano wartość ozn.  $R_{p0,04}$ . Wobec dużej dowolności w określaniu granicy plastyczności wprowadzono pojęcie umownej granicy plastyczności wyznaczonej dla wydłużenia względnego  $\varepsilon_t$  równego 0,2%.

### Doświadczalny wykres krzywej umocnienia

Końcowym etapem wykresłej obróbki danych doświadczalnych otrzymanych z próby rozciągania – a wykorzystujących wartości odkształcenia plastycznego  $\varepsilon$  oraz odpowiadających im wartości naprężenia uplastyczniającego  $\bar{\sigma}_p$  – jest zbudowanie wykresu krzywej umocnienia  $\bar{\sigma}_p(\varepsilon)$ . Doświadczalnie wyznaczoną

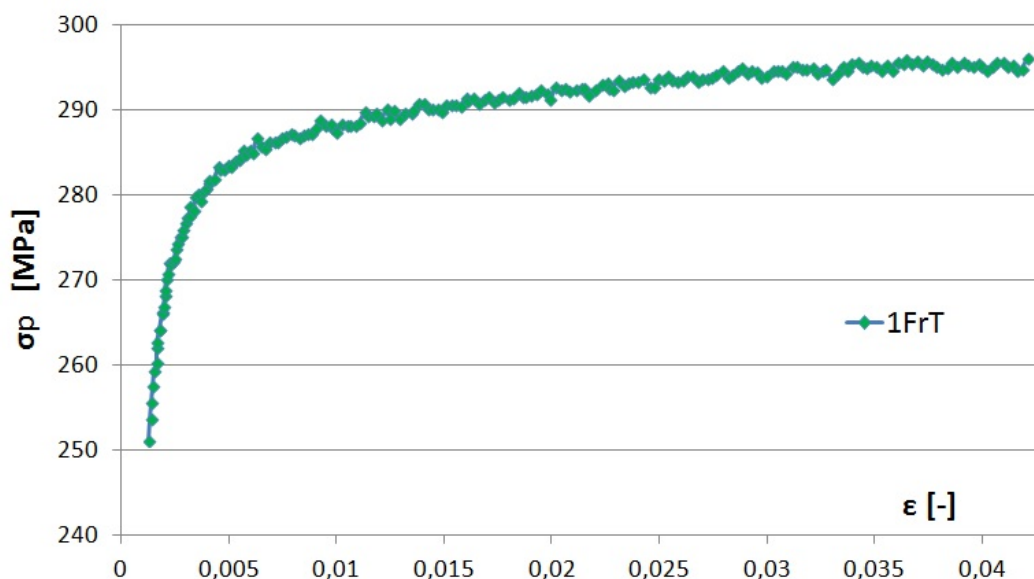
krzywą umocnienia dla analizowanego przypadku, reprezentowanego przez wyniki rozciągania próbki 1FrT, pokazano na Rys. 8.



Rys. 7. Wykres przebiegu umownego naprężenia osiowego  $\sigma_p$  w funkcji odkształcenia całkowitego  $\varepsilon_c$  ukazujący wykreślony sposób wyznaczania umownej granicy plastyczności – dane z rozciągania próbki ozn. „1FrT”

Warto na Rys. 8. zwrócić uwagę na zakres odkształcenia plastycznego  $\varepsilon$ , w którym prezentowana jest doświadczalna krzywa umocnienia  $\sigma_p(\varepsilon)$ . Został on ograniczony do zakresu odkształcenia równomiernego. Trzeba zatem pominąć fazę niestatecznego płynięcia, ponieważ dane doświadczalne uzyskano przecież z próby jednoosiowego rozciągania. Arbitralnie wybrano również zakres prezentowanego na wykresie naprężenia uplastyczniającego  $\sigma_p$ . Dane do pokazania punktów leżących na krzywej doświadczalnej pobrano z tabeli, której część prezentowano wcześniej na Rys. 4c. Widoczne na Rys. 8 są mianowicie tylko te punkty, których wartości w arkuszu danych zaznaczono ciemniejszym tłem (porównaj wcześniejsze opisy).

Na potrzeby obliczeń technologicznych prezentacja umocnienia w postaci wykresu nie jest rozwiązaniem praktycznym. Stosowniejsze jest podanie funkcyjnej zależności  $\sigma_p = f(\varepsilon)$  między naprężeniem uplastyczniającym  $\sigma_p$  a odkształceniem trwałym  $\varepsilon$ , np. w postaci równania matematycznego.

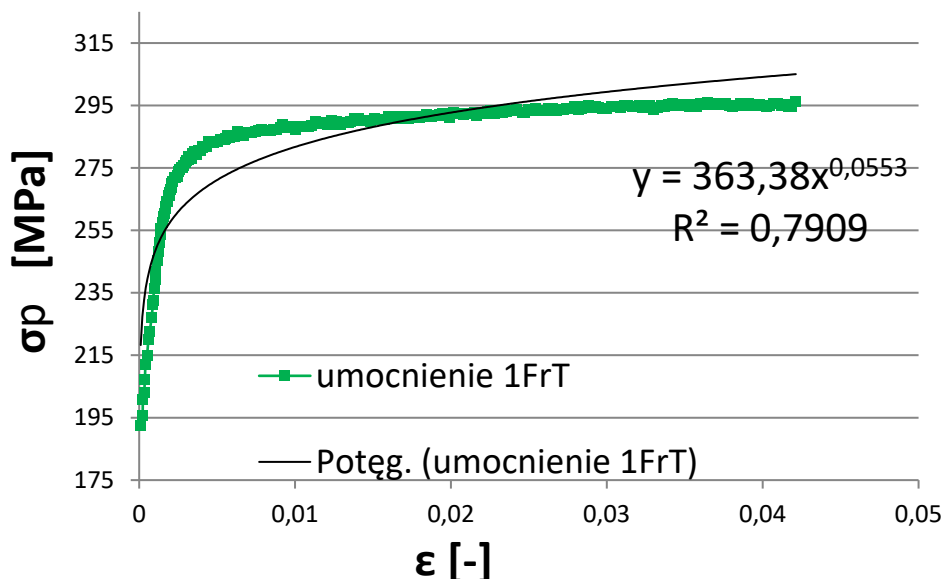


Rys. 8. Wykres doświadczalnej krzywej umocnienia  $\sigma_p(\varepsilon)$  wyznaczony na podstawie wyniku próby rozciągania próbki ozn. „1FrT” (ograniczony zakres danych)

## Wyznaczanie stałych równania

### Równanie dwuparametrowe

Aby w prosty sposób uzyskać stałe dwuparametrowego równania matematycznego, które opisuje przebieg krzywej umocnienia, można na wykresie krzywej umocnienia narysować potęgową linię trendu. W ten sposób łatwo jest, uzyskać równanie krzywej aproksymującej położenie punktów doświadczalnych. Zabieg taki pokazano na Rys. 9 z zastosowaniem zmniejszonego zakresu wartości na osi rzędnych, ale za to powiększonego zakresu danych doświadczalnych.



Rys. 9. Obróbka matematyczna wykresu doświadczalnej krzywej umocnienia – pokazano krzywą doświadczalną (linia gruba) wraz z linią (cienką) aproksymującą położenie punktów doświadczalnych funkcją o równaniu dwuparametrowym – dane z rozciągania próbki ozn. „1FrT”

Tym razem rozpoczęto pokazywanie na wykresie punktów doświadczalnych od umownej granicy plastyczności  $R_{02}$ , której wartość dla próbki 1FrT określono jako  $R_{02} = 188,4166$  MPa. Zatem zaprezentowano dane dla początkowego zakresu tablicy danych z Rys. 4c, a nie tylko dla danych pokazanych na ciemniejszym tle. Dlatego tym razem początek doświadczalnej krzywej umocnienia  $\sigma_P(\epsilon)$  „zaczyna się” już na osi rzędnych (porównaj w położeniu krzywej na Rys. 8).

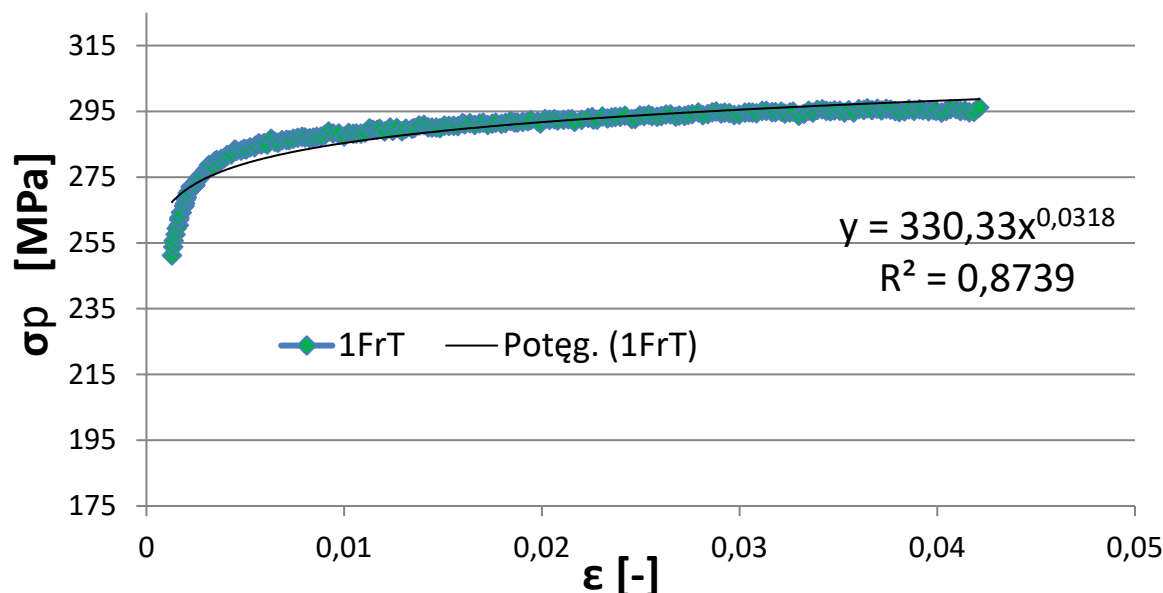
Komentując wynik aproksymacji położenia doświadczalnej krzywej umocnienia  $\sigma_P(\epsilon)$  zależnością funkcyjną  $\sigma_P = f(\epsilon)$  z wykorzystaniem wszystkich punktów doświadczalnych, należy stwierdzić, że opis równaniem dwuparametrowym jest daleko niezadowalający. Wartości stałej  $C=360$  MPa i wykładnika  $n=0,0553$  nie są odpowiednie. Widać, że umocnienie materiału przy narastającej wartości odkształcenia plastycznego wysycha się. Wartości  $\sigma_P$  obliczone przy użyciu równania dwuparametrowego dałyby zawyżone wartości dla większych wartości  $\epsilon$  niż te pokazane na wykresie. Dlatego wrócono do pomysłu ograniczenia liczby punktów doświadczalnych przez odrzucenie wybranej liczby początkowych punktów.

Na Rys. 10 pokazano wynik ograniczenia liczby analizowanych punktów doświadczalnych dla próbki 1FrT przez podwyższenie wartości granicy plastyczności z  $R_{02} = 188,4166$  MPa do  $R_{02} = 251,2194$  MPa. Wykreślono krzywą umocnienia tylko dla danych począwszy od wyższej granicy plastyczności, a więc dla zakresu, który wskazano przez podświetlenie ciemniejszym tłem w tablicy danych na Rys. 4c. Analizowane są więc teraz te same dane doświadczalne, które wcześniej prezentowano na Rys. 8. Widać, że po dodaniu do wykresu linii trendu o odpowiednio dobranym równaniu, tj. dwuparametrowym, można w arkuszu EXCEL tą samą prostą metodą uzyskać lepszy wynik. Parametry dwuparametrowego równania opisującego krzywą umocnienia, lepiej aproksymujące dane doświadczalne przyjmują teraz następujące wartości: stała  $C=330$  MPa i wykładnik  $n=0,031$ .

Wykresy krzywej umocnienia odkształceniowego umożliwiają ocenę przydatności metalowych materiałów do obróbki plastycznej. Technolog dowiadyuje się z nich jak zmieniają się właściwości plastyczne metalu w funkcji zastosowanego odkształcenia. Wspomniano już, że zmianę taką najlepiej jest opisywać równaniem matematycznym. Jednakże postać równania musi być tak dobrana, aby jak najlepiej przybliżać



położenie punktów doświadczalnych. Z przedstawionych wykresów (np. na rysunkach Rys. 9 i Rys. 10) wynika, że aproksymacja krzywych doświadczalnych równaniem dwuparametrowym nie daje dobrych rezultatów – widać, że linia aproksymująca (cienka) rozchodzi się z położeniem punktów doświadczalnych (linia gruba), a wartość współczynnika  $R^2$ , który określa jakość aproksymacji jest niska (odpowiednio 0,79 i 0,87). Dlatego zwykle warto poszukać lepszego sposobu aproksymacji. W przypadku krzywych umocnienia drugim powszechnie stosowanym równaniem jest równanie trójparametrowe, czyli o większej liczbie stałych.



Rys. 10. Obróbka matematyczna wykresu doświadczalnej krzywej umocnienia dla ograniczonej liczby punktów przez umowne podwyższenie wartości granicy plastyczności – krzywa doświadczalna (linia gruba), krzywa aproksymująca położenie punktów doświadczalnych funkcją o równaniu dwuparametrowym (linia cienka) – dane z rozciągania próbki ozn. „1FrT”

### Równanie trójparametrowe

Równanie trójparametrowe, które jest stosowane do opisu umocnienia ma postać

$$\sigma_p = C_1(\varepsilon_0 + \varepsilon)^n$$

Wartości stałej  $C_1$ , odkształcenia wstępnego  $\varepsilon_0$  i wykładnika umocnienia  $n$  najprościej wyznacza się z warunku, aby krzywa określona podanym równaniem przechodziła przez trzy zadane punkty A, B, C, które należą do zbioru punktów krzywej doświadczalnej. Jest to tzw. metoda uproszczonego wyznaczania równania trójparametrowego opisana w literaturze [7]. Stosując tę prostą metodę poniżej spróbowano, czy dla dostępnych danych doświadczalnych uda się uzyskać lepszy wynik opisu umocnienia niż w przypadku równania dwuparametrowego. Na kolejnych rysunkach: Rys. 11, Rys. 12 i Rys. 13 pokazano fragmenty arkusza kalkulacyjnego, w których zamieszczono przykładowe dane użyte do prowadzenia obliczeń.

Znane wartości odkształcenia  $\varepsilon_A$ ,  $\varepsilon_B$ ,  $\varepsilon_C$ , które określają odcięte dla wybranych trzech punktów doświadczalnych, umożliwiają obliczenie wartości odkształcenia wstępnego  $\varepsilon_0$ . Należy posłużyć się wzorem:

$$\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_C^2 - \varepsilon_A \varepsilon_B}{\varepsilon_A + \varepsilon_B - 2\varepsilon_C}$$

	EI/100	S	
A	0,0068316	280,533	E0
B	0,0220893	291,797	0,14544
C	0,039085	295,696	

Rys. 11. Fragment arkusza kalkulacyjnego z danymi do wyznaczenia odkształcenia wstępnego  $\varepsilon_0$

Mając obliczoną wartość  $\varepsilon_0$ , można z kolei wyznaczyć wartość wykładnika potęgowego  $n$ , który wyrażony jest wzorem:

$$n = \frac{\lg \sigma_{pB} - \lg \sigma_{pA}}{\lg(\varepsilon_0 + \varepsilon_B) - \lg(\varepsilon_0 + \varepsilon_A)}$$

	EI/100	S		
A	0,0068316	280,533	E0	n
B	0,0220893	291,797	0,14544	0,79533
C	0,039085	295,696		

Rys. 12. Fragment arkusza kalkulacyjnego z danymi do wyznaczenia wykładnika potęgowego n

Przy poznanych już wartościach  $\varepsilon_0$  oraz n można wreszcie obliczyć stałą  $C_1$ . Wystarczy w tym celu podstawić wartości  $\sigma_p$  i  $\varepsilon$  dla jednego z punktów A, B lub C do odpowiednio przekształconego równania trójparametrowego. Wybrano dane dla punktu A uzyskując

$$C_1 = \frac{\sigma_{pA}}{(\varepsilon_0 + \varepsilon_A)^n}$$

	EI/100	S			
A	0,0068316	280,533	E0	n	C1
B	0,0220893	291,797	0,14544	0,79533	1253,33
C	0,039085	295,696			

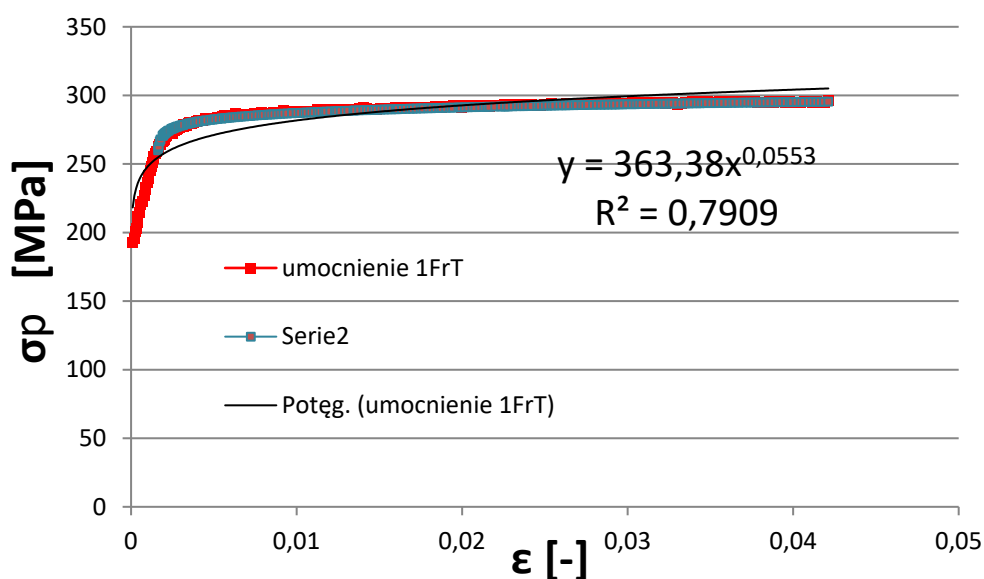
Rys. 13. Fragment arkusza kalkulacyjnego z danymi do obliczenia stałej  $C_1$ 

Ostatecznie otrzymano równanie trójparametrowe:

$$\sigma_p = 1253 \cdot (0,145 + \varepsilon)^{0,7953}$$

### Porównanie wyników aproksymacji

Stosując równanie trójparametrowe starano się otrzymać dokładniejsze odwzorowanie matematycznego opisu przebiegu doświadczalnych krzywych umocnienia. Ponadto równanie zawierające trzy stałe materiałowe można stosować do innych stanów niż wyżarzony. A przecież w przypadku metali UFG mamy do czynienia z materiałami o bogatej historii odkształcenia plastycznego. Dzięki temu opis funkcją trójparametrową będzie miał większe zastosowanie w analizie procesów kształtowania z użyciem metod matematycznych niż równanie dwuparametrowe. Przy aproksymacji punktów doświadczalnych równaniem dwuparametrowym współczynnik korelacji  $R^2$  wynosił od 0.79 do 0.87, co nie jest satysfakcjonującym odzwierciedleniem krzywej doświadczalnej. Na wykresie z Rys. 14 przedstawiono porównanie opisu matematycznego doświadczalnej krzywej umocnienia za pomocą równania dwuparametrowego (cienka linia) oraz równania trójparametrowego (ciemna linia gruba). Jak można zauważyć równanie trójparametrowe lepiej odzwierciedla przebieg doświadczalnej krzywej umocnienia, o czym świadczy pokrywanie się punktów należących do opisu matematycznego („Serie2”) z położeniem punktów doświadczalnych (umocnienie 1FrT) w zakresie naprężenia od 260MPa do 300MPa.



Rys. 14. Porównanie wyniku aproksymacji doświadczalnej krzywej umocnienia określonej z rozciągania próbki ozn. „1FrT” (gruba linia „umocnienie 1FrT”) równaniem dwuparametrowym (linia cienka „Potęg.( umocnienie 1FrT)”) oraz równaniem trójparametrowym o parametrach wyznaczonych metodą uproszczoną (szara linia gruba „Serie2”)

## Częste błędy

Wyznaczenie właściwego opisu właściwości materiału na potrzeby obróbki plastycznej jest zadaniem pracochłonnym. Nic więc dziwnego, że często zdarzają się uproszczenia. Obniżają one jakość tego opisu i mają niekorzystne przełożenie na wartości parametrów kształtowania, które rozmijają się z rzeczywistością.

Kardynalnym błędem jest zapominanie, że obliczając naprężenie należy odnosić obciążenie do realnego przekroju. Niedopuszczalne jest dodawanie odkształceń sprężystych  $\epsilon_{spr}$  do odkształceń trwałych  $\epsilon$ . Zakres tych odkształceń trwałych, dla których na podstawie danych doświadczalnych z próby jednoosiowego rozciągania można wyznaczyć krzywą umocnienia, powinien być wyznaczany we właściwy sposób, tj. tylko od granicy plastyczności (zazwyczaj umownej  $R_{p0.2}$ ) do wytrzymałości doraźnej na rozciąganie  $R_m$ . Postępowanie powinno być ostrożne, aby nie uzyskać zakłóconego opisu umocnienia, np. przez włączenie do analizy punktów doświadczalnych z zakresu odkształcenia sprężystego lub objęcie analizą zbyt dużej liczby punktów doświadczalnych w przypadku, gdy krzywa rozciągania wykazuje mocno rozmyte maksimum.

Eksperymentatorzy uświadamiają sobie konsekwencje lekceważenia ww. błędów i w większości przypadków postępują zgodnie z regułami. Niestety wciąż zdarzają się uproszczenia. Innym częstym uchybieniem jest np. zapominanie, że wartość odkształcenia sprężystego  $\epsilon_{spr}$  ulega ciągłej zmianie. Zmiana ta zachodzi podczas całego procesu rozciągania, a dla wyznaczania krzywej umocnienia najważniejsze jest odczytanie wartości  $\epsilon_{spr}^{min}$  i  $\epsilon_{spr}^{max}$ . W ten sposób poznajemy zakres wartości  $\epsilon_{spr}$ , które należy odejmować od odkształcenia całkowitego  $\epsilon_c$ , aby w prawidłowy sposób uzyskać interesujące nas odkształcenia trwałe  $\epsilon$ .

## Zalecenia

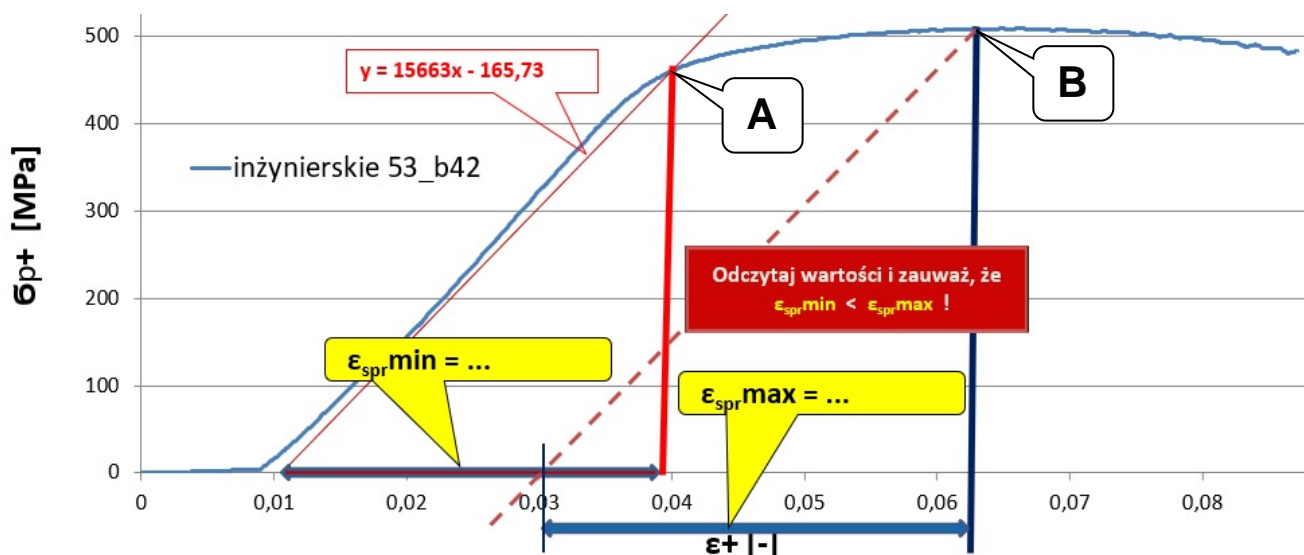
Mając na uwadze potrzebę prawidłowego wyznaczenia zakresu punktów doświadczalnych z krzywej rozciągania (Rys. 2), właściwego określenia współrzędnych punktów doświadczalnych i poprawnego przeniesienia położenia punktów na płaszczyznę krzywej umocnienia (Rys. 1), poniżej podano zalecenia. Są to podstawowe wytyczne dla opracowania danych doświadczalnych z próby rozciągania, które trzeba uwzględnić celem wyznaczenia poprawnego opisu właściwości plastycznych metalu na potrzeby technologii obróbki plastycznej:

- 1) Prawidłowo wyznaczyć granicę plastyczności, pokazując przy tym różnice występujące przy przyjęciu różnej wartości wydłużenia względnego, którą zastosowano dla oznaczenia siły rozciągającej (tzn. obciążenia) powodującej rozpoczęcie płynięcia plastycznego – należy to zrobić przy użyciu specjalnie przygotowanego wykresu, którego przykład zamieszczono na Rys. 7. Zaleca się: (1) znaleźć pierwszy punkt doświadczalny na krzywej rozciągania, który wskazuje na początek odchylenia się punktów od prostej fazy odkształcenia sprężystego (odnotować na wykresie wartość wydłużenia  $\epsilon_f$  dla tego punktu), (2) wskazać punkt doświadczalny na krzywej rozciągania, który w wyraźny sposób zdaje się wskazywać na rozpoczęcie płynięcia plastycznego (odnotować na wykresie wartość wydłużenia  $\epsilon_f$  dla tego punktu), (3) znaleźć punkt przecięcia linii prostej fazy odkształcenia sprężystego wystawionej w miejscu wydłużenia względnego  $\epsilon_f = 0,2\%$  z położeniem punktu doświadczalnego na krzywej rozciągania – będzie to punkt doświadczalny, dla którego wyznacza się umowną granicę plastyczności  $R_{p0.2}$  (odnotować na wykresie wartość obciążenia odpowiadającego temu punktowi doświadczalnemu, czyli w zależności od struktury danych krzywej rozciągania: w przypadku  $P(\Delta L)$  – siły lub w przypadku  $\sigma(\epsilon_f)$  – naprężenia  $\sigma_{p0.2}$ ).
- 2) Przed wspólną, tzn. na jednym wykresie zbiorczym, prezentacją wielu krzywych rozciągania – uzyskanych dla jednej rodziny (jednego stanu umocnienia) z wielu rozciąganych próbek – sprowadzić linie wykresów do jednego punktu początkowego. Ma to na celu wyeliminowanie niepożądanych efektów związanych z kasowaniem luzów występujących w uchwytach trzymających próbkę i deformacji części chwytowych próbek do rozciągania<sup>8</sup>. Te niepożądane zjawiska są najczęstszą przyczyną nieproporcjonalnego odkształcenia w początkowej fazie rozciągania (zakres odkształcenia sprężystego) i niezamierzonego przesunięcia krzywych rozciągania w poziomie. Zaleca się zatem sprowadzenie krzywych do wspólnego punktu, dla którego zazwyczaj wyznacza się umowną granicę plastyczności, a więc do punktu dla wydłużenia względnego odpowiadającego wartości 0,2%.
- 3) Na wykresie krzywej umocnienia nie pokazywać wartości umownych wskaźników określających właściwości wytrzymałościowe, tj. granicy plastyczności (umownej  $R_{p0.2}$ ) i wytrzymałości doraźnej na rozciąganie  $R_m$ , których wartości obliczono w odniesieniu do przekroju początkowego rozciąganej próbki, a więc przekroju już nieistniejącego po wystąpieniu odkształceń trwałych. Krzywe umocnienia należy rysować począwszy od wartości wydłużenia

<sup>8</sup> Takie efekty często występują w przypadku stosowania ekstensometrów bezstykowych, których działanie opiera się na systemach wizyjnych. Najczęściej jest to związane z objęciem analizą wizyjną zbyt dużego obszaru rozciąganej próbki, nawet wchodzącego w obszar części chwytowych próbki

względnego przyjętego do wyznaczenia umownej granicy plastyczności, a więc rozpoczynając od wartości odkształcenia trwałego odpowiadającego wydłużeniu względnemu  $\epsilon_t = 0,2\%$ . Dla porównania odczytać wartość naprężenia uplastyczniającego dla punktów doświadczalnych krzywej umocnienia: punktu pierwszego  $\sigma_{p}^{\min}$  (celem porównania z obliczoną wartością umownej granicy plastyczności  $R_{p02}$ ) i punktu ostatniego  $\sigma_{p}^{\max}$  (celem porównania z obliczoną wartością wytrzymałości doraźnej na rozciąganie  $R_m$ ).

- 4) Wartość odkształcenia sprężystego  $\epsilon_{spr}$  podczas całego procesu rozciągania ulega nieustannej zmianie. Przyjmuje różne wartości we wszystkich fazach próby rozciągania, tj.: w fazie (1) sprężystego odkształcenia, w fazie (2) trwałego wydłużania równomiernego i w fazie (3) niestatecznego płynięcia (rozwoj szyjki). W fazie (2) – najbardziej interesującej dla śledzenia umocnienia odkształceniowego – odkształcenie sprężyste narasta począwszy od najmniejszej wartości  $\epsilon_{spr}^{\min}$  dla punktu, w którym następuje uplastycznienie, a osiąga największą wartość  $\epsilon_{spr}^{\max}$  dla punktu, dla którego wyznacza się wytrzymałość doraźną na rozciąganie. W celu prawidłowego wyznaczenia odkształcenia trwałego  $\epsilon$  dla każdego doświadczalnego punktu z fazy (2) rozciągania, należy od odkształcenia całkowitego  $\epsilon_c$  odczytanego dla tego punktu odjąć odkształcenie sprężyste  $\epsilon_{spr}$ , obliczone dla tego punktu. Przy tym obliczeniu trzeba wykorzystać pochylenie linii prostej odkształcenia sprężystego (obliczone przy wyznaczaniu granicy plastyczności w sposób pokazany na Rys. 7) i skorzystać z twierdzenia Talesa. Zilustrowano to za pomocą wykresu na Rys. 15, na którym zaznaczono dwa skrajne punkty „A” i „B” wyznaczające granice dolną i górną dla wszystkich punktów doświadczalnych przenoszonych na krzywą umocnienia. Dla tych punktów należy – w celu skontrolowania prawidłowego postępowania – określić odpowiednio: dla „A”  $R_{p02}$ ,  $\sigma_{p}^{\min}$ ,  $\epsilon_r^{\min}$  i  $\epsilon_{spr}^{\min}$  oraz dla punktu „B”  $R_m$ ,  $\sigma_{p}^{\max}$ ,  $\epsilon_r$  i  $\epsilon_{spr}^{\max}$ .



Rys. 15. Krzywa rozciągania (linia opisana „inżynierskie 53\_b42”) wykreślona na podstawie danych zarejestrowanych podczas próby jednoosiowego rozciągania próbki ozn. „53\_b42”

## LITERATURA

- 1 S.Erbel, K.Kuczyński, L.Olejek: „Technologia obróbki plastycznej. Laboratorium”, OWPW, Warszawa 2003, str.19–28
- 2 L.Olejek: „Mechanika odkształcenia plastycznego” Wykład 1 – odkształcanie ciała sprężysto-plastycznego. Cykl wykładów OBPLA z przedmiotu Obróbka plastyczna, siatkowy dla kierunku MiBM oraz obieralny dla kierunków ZiIP i AiR. Semestr letni 2015/16. Wydział Inżynierii Produkcji Politechniki Warszawskiej
- 3 <http://www.e-spawalnik.pl/?proba-rozciągania.162> (V.2016)
- 4 S.Erbel, K.Kuczyński, L.Olejek: „Technologia obróbki plastycznej. Laboratorium”, OWPW, Warszawa 2003, str.29–30
- 5 S.Erbel, K.Kuczyński, L.Olejek: „Technologia obróbki plastycznej. Laboratorium”, OWPW, Warszawa 2003, str.34–35
- 6 V.M.Segal, S.Ferrasse, F.Alford: Tensile testing of ultra fine grained metals. Materials Science and Engineering. A 422(2006), pp.321–326
- 7 S.Erbel, K.Kuczyński, L.Olejek: „Technologia obróbki plastycznej. Laboratorium”, OWPW, Warszawa 2003, str.29–35